

正整数拆分乘积最大值的贪心策略证明与算法分析

贾砚麟¹ 梁博^{2*}

(1. 北京理工大学附属中学

2. 北京海淀凯文学校)

DOI: 10.65285/JYLLYJ.V2I4.003

摘要: 针对正整数拆分后各分项乘积最大化的经典数论与竞赛问题,以 GESP 编程竞赛题目为研究背景,采用反证法、均值不等式、方差分析及微积分求导等方法开展严谨推导。首先通过反证法证明最优拆分不含数值 1 的拆分项;再利用均值不等式与方差最小化原理,证明固定项数时拆分只能由两个相邻整数构成;随后将离散整数问题连续化建模,构造单变量函数借助求导求解极值,确定自然常数 e 为最优拆分单元理论值,进而对比整数 2 和 3 的函数取值,得出优先拆分为 3,其次拆分为 2 的贪心规则。最终归纳出正整数按模 3 分类的乘积最大值通用计算公式,并对动态规划、暴力枚举等解法,表明本文推导的贪心算法时间复杂度更优。研究验证了离散问题连续化求解的数学思维有效性,可为信息学竞赛同类题型提供理论依据与解题范式。

关键词: 整数拆分; 乘积最大; 均值不等式; 微积分; 贪心策略

Proof of Greedy Strategy and Algorithm Analysis on Maximum Product of Positive Integer Partition

Yanlin Jia¹, Bo Liang^{2*}

1. High School Affiliated to BIT

2. BeiJing Haidian Kaiwen Acadmey

Abstract: Taking the classic number theory and competition problem of maximizing the product of each item after positive integer partition as the research background of GESP programming competition, this paper carries out rigorous derivation by using proof by contradiction, mean value inequality, variance analysis and calculus derivation. Firstly, it is proved by contradiction that the optimal partition does not contain the partition item of value 1. Then, based on the mean value inequality and the principle of minimum variance, it is verified that the partition with fixed item numbers can only consist of two adjacent integers. The discrete integer problem is modeled continuously, and the univariate function is constructed to solve the extreme value by derivation, confirming that the natural constant e is the theoretical value of the optimal partition unit. By comparing the function values of integers 2 and 3, the greedy rule of splitting into 3 first and 2 second is obtained. Finally, the general calculation formula of maximum product classified by modulo 3 of positive integers is summarized. Compared with dynamic programming and brute force enumeration, the greedy algorithm derived in this paper has better time complexity. The research verifies the effectiveness of the mathematical thinking of solving discrete problems by continuous method, and provides theoretical basis and problem-solving paradigm for similar problems in informatics competitions.

Keywords: integer partition; maximum product; mean value inequality; calculus; greedy strategy

前言

正整数拆分后各分项乘积最大化是数论与组合优化中的经典问题,广泛出现于信息学竞赛中。如题对于 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ 时 n 的拆分是满足 $\sum_{i=1}^k a_i = n$ 的若干个正整数 $a_1, \dots, a_k$ 其中 $1 \leq k \leq n$ 。需要求出 n 的所有拆分中 $\prod_{i=1}^k a_i$ 的最大值。问题要求将给定正整数 n 拆分为若干正整数之和,使得所有拆分项的乘积最大。现有解法多以动态规划、贪心策略为主,但多数竞赛场景下的解法仅给出操作规则,缺少从原理出发的严谨推导与证明。本文补齐了该贪心算法的数学证明链条,同时对比不同解法的时间复杂度,体现离散问题连续化求解的思维价值,可为中学数学教学与信息学竞赛同

类问题提供理论依据与解题范式。

一、证明过程

(一) 固定拆分项数时的最优拆分规则

在正式推导前,我们先明确最优拆分的核心前提:当 $n \geq 2$ 时,乘积最大的拆分中,一定不包含数值为 1 的拆分项。

即求乘积 $P = \prod_{i=1}^k x_i$ 的最大值。

采用反证法,先假设存在含 1 的最优拆分,再通过严格保持项数、总和不变的等价调整,证明该拆分无法取得最大值,从而推翻原假设,完成命题证明。

假设存在一个使乘积取最大值的拆分,其中至少有一个项为 1,不妨设 $x_k=1$ 。

由于 $k \leq N-1$, 拆分总和为 N , 因此其余 $k-1$ 个项的和为 $N-1$; 结合 $k-1 \leq N-2$, 可推出这 $k-1$ 个项中至少存在一个项 ≥ 2 (若其余项全为 1, 则总和为 $k-1 \leq N-2 < N-2$, 与和为 $N-1$ 矛盾), 不妨设 $x_k \geq 2$ 。

构造严格保持项数 k 、总和 N 不变的新拆分:

将原拆分中的两个项 x_{k-1} 、 $x_k=1$, 调整为 $x_{k-1}-1$ 、 2 。

调整后两项的和: $(x_{k-1}-1)+2=x_{k-1}+1$, 与原两项和完全一致, 因此拆分总和仍为 N , 项数仍为 k , 完全符合拆分约束。

对比调整前后的乘积变化:

原两项的乘积: $x_{k-1} \cdot 1 = x_{k-1}$

调整后两项的乘积: $(x_{k-1}-1) \cdot 1 = 2x_{k-1}-2$

两者的差值为:

$$(2x_{k-1}-2)-x_{k-1}=x_{k-1}-2$$

矛盾推导与结论:

当 $x_{k-1}-2 > 2$ 时, 差值为正, 调整后的乘积严格大于原乘积, 与“原拆分是乘积最大的拆分”的核心假设矛盾;

当 $x_{k-1}-2=2$ 时, 差值为 0, 调整后的乘积与原乘积相等, 此时拆分中仍存在 1, 可对剩余的 1 重复上述调整步骤, 直到拆分中无 1, 或所有项均为 2 和 3 (无 1 项)。

故 P 取最大值的拆分中, 一定不包含数值为 1 的拆分项。

注: 在 $n=1$ 时

$$\because n \in \mathbb{Z}^+, n=1$$

$$\text{又} \because a_i \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \text{当 } n=1 \text{ 时有且仅有一种拆分方式即 } \prod_{i=1}^k a_i = 1$$

首先, 根据二元基本等式 (和为定值则积有最大值, 反之积有定值则和有最小值)。现在 $\sum_{i=1}^k a_i$ 是定值 n , 则 $\prod_{i=1}^k a_i$ 存在最大值。那么最大值如何求出呢? 据均值不等式 $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$ 当所有 x_i 相等时不等式取到等号。可得当 $a_i = \frac{n}{k}$ 时积有最大值

$$\because n \in \mathbb{Z}^+, \text{ 且 } a_i \in \mathbb{Z}$$

$$\text{又} \because a_i = \frac{n}{k} \text{ 时有最大值}$$

$$\therefore \text{令 } n = q \cdot k + r \left(r < k, \text{ 即 } q = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right) \text{ 时有 } a_i = \frac{q \cdot k}{k} \text{ 使得}$$

$$\prod_{i=1}^k a_i \text{ 最大}$$

$$\because n \neq q \cdot k, \text{ 且 } n - q \cdot k = n \bmod k$$

$$\therefore \text{需要分配 } n \bmod k \text{ 个数使得 } \prod_{i=1}^k a_i \text{ 最大}$$

证明方差最小的拆分, 所有项只能是 q 或 $q+1$

可通过方差说明

$$\because \sigma^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2, n = q \cdot k + r$$

$$\therefore \mu = q + \frac{n \bmod k}{k}, n \bmod k < k$$

$$\therefore \mu \in [q, q+1)$$

$\therefore$ 只要拆分中存在超出 $[q, q+1]$ 范围的项, 就一定能够通过调整让方差变小, 因此这类拆分不可能是方差最小的解

假设存在一个正整数拆分, 其中有一项 $a \geq q+2$, 同时有一项 $b \leq q-1$ (只要有项超出 $[q, q+1]$, 必然同时存在

这两类项, 否则总和无法等于 S)

做一次保和调整: 将 a 减 1 变为 $a-1$, 将 b 加 1 变为 $b+1$

计算调整前后的离均差平方和变化 ΔQ :

只有 a 和 b 两项发生变化, 其余项不变, 因此: $\Delta Q =$

$$Q_{\text{新}} - Q_{\text{旧}}$$

$$= [(a-1-\mu)^2 + (b+1-\mu)^2] - [(a-\mu)^2 + (b-\mu)^2]$$

$$= [(a-\mu)^2 - 2(a-\mu) + 1 + (b-\mu)^2 + 2(b-\mu) + 1] - [(a-\mu)^2 + (b-\mu)^2]$$

$$= -2(a-\mu) + 2(b-\mu) + 2$$

$$= 2(b-a+1)$$

代入 $a \geq q+2$ 、 $b \leq q-1$, 可得

$$b-a+1 \leq (q-1) - (q+2) + 1 = -2 < 0$$

因此 $\Delta Q < 0$, 即调整后离均差平方和 Q 变小, 方差 σ^2 同步变小

这就证明: 只要拆分中有项超出 $[q, q+1]$ 的范围, 就一定能够通过调整让方差更小, 因此这类拆分不可能是方差最小的解

唯一剩下的可行解, 就是所有项只能是 q 或 $q+1$

确定 q 和 $q+1$ 的数量

设有 r 个 $q+1$, $k-r$ 个 q , 代入总和约束:

$$r \cdot (q+1) + (k-r) \cdot q = qk + r = n$$

与我们之前的带余除法完全匹配, r 就是 n 除以 k 的余数, 数量唯一确定

特殊情况: 当 $r=0$ ($n \bmod k = 0$), 所有项均为 q , 此时 $Q=0$, 方差 $\sigma^2=0$, 达到方差的理论最小值

证明正整数拆分中, 方差越小, 乘积越大; 方差最小的拆分, 乘积必然最大

沿用之前的保和调整: 将 $a \geq q+2$ 减 1 为 $a-1$, 将 $b \leq q-1$ 加 1 为 $b+1$, 其余项不变

$$\text{设积 } P = \prod_{i=1}^k a_i$$

则数列总乘积的变化, 仅由这两项的乘积变化决定, 计算乘积比值:

$$\frac{P_{\text{新}}}{P_{\text{旧}}} = \frac{(a-1)(b+1)}{ab}$$

展开分子:

$$(a-1)(b+1) = ab + a - b - 1$$

因此:

$$\frac{P_{\text{新}}}{P_{\text{旧}}} = 1 + \frac{a-b-1}{ab} \text{ 代入 } a \geq q+2, b \leq q-1, \text{ 可得:}$$

$$a-b-1 \geq (q+2) - (q-1) - 1 = 2 > 0$$

$$\text{因此 } \frac{P_{\text{新}}}{P_{\text{旧}}} > 1, \text{ 即调整后乘积严格变大}$$

$\therefore$ 任何一个非最小方差的拆分, 都可以通过有限次上述保和调整, 每次调整都让「方差变小、乘积变大」直到调整为方差最小的拆分 (所有项为 q 或 $q+1$)

达到最小方差拆分后, 无法再进行任何让方差变小的调整: 若再调整 $q+1$ 和 q , 仅为项的顺序交换, 方差不变, 乘积也不变

因此, 方差最小的拆分, 必然是乘积最大的拆分, 不

存在任何正整数拆分的乘积能超过它

∴综合看: $a_i = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ 或 $a_i = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1$ 时可做到当 $a_i \in \mathbb{Z}$ 时候结果最大。

∴最大值可表示为:

$$\prod_{i=1}^k a_i = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^{k-n \bmod k} \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1 \right)^{n \bmod k}$$

(二) 最优拆分的连续化建模

至此, 当 $a_i \in \mathbb{Z}$ 且 k 已知时, 我们可计算出乘积最大值, 但 k 如何取值呢? 不妨放松条件, 假设 $a_i \in \mathbb{R}$ 时探究 k 该如何取值。

观察等式与 a_i 的条件时可得当 $a_i = \frac{n}{k}$ 有最大值, 即最大值可表示为:

$$\prod_{i=1}^k a_i = \left(\frac{n}{k} \right)^k$$

不妨设 $\frac{n}{k} = p$, 则 $k = \frac{n}{p}$, 所求最大乘积变为:

$$\prod_{i=1}^{\frac{n}{p}} a_i = p^{\frac{n}{p}}$$

此时我们只需求出 p 的值即可知道最大乘积。

考虑设多元函数 $f(n, p) = p^{\frac{n}{p}}$, 即该函数极大值点为所求。

注意到 n 的取值与该函数极大值点位置无关。

∴取 $n=1$ 时有 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

(三) 目标函数的求导运算与极值点求解

考虑求导:

注意到该函数无法直接求导

∴考虑两边同时取对数以消去指数项

在等式右侧取以 a 为底的对数时结果为 $\frac{1}{x} \cdot \log_a x$

对 $\log_a x$ 求导为 $\frac{1}{x \cdot \ln a}$

注意到当 $a=e$ 时导数为 $\frac{1}{x}$

结果最简洁

故对等式两边同求自然对数则原式为:

$$\ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

据公式 $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ 及链式法则 $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ 可得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

∴ $0 \notin f(x)$ 值域

∴ $f(x)$ 与 x 轴无交点即恒不等于 0

∴可将

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

等式两边同乘 $f(x)$

$$\text{得 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot f(x)$$

$$\text{即 } f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}(1 - \ln x)}{x^2}$$

(四) 最优拆分项的取值范围论证

令 $f'(x) = 0$ 即对 $\frac{x^{\frac{1}{x}}(1 - \ln x)}{x^2} = 0$ 求解

观察得若想使 $f'(x) = 0$, 可得该式所有项数

$(x^{\frac{1}{x}}, (1 - \ln x), \frac{1}{x^2})$ 中至少有一项值为 0

∴ $x^{\frac{1}{x}} = 0$ 时的解与 $\frac{1}{x^2} = 0$ 时的解不存在 (即无意义)

∴有且只有当 $(1 - \ln x) = 0$ 时

$$\frac{x^{\frac{1}{x}}(1 - \ln x)}{x^2} = 0$$

∴当 $(1 - \ln x) = 0$ 时 $x = e$

∴该方程的解为 $x = e$

∴当 $x = e$ 时 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ 有极值

此时不难发现 $x^{\frac{1}{x}}, \frac{1}{x^2}$ 恒正, $(1 - \ln x)$ 大小与 x 取值有关

∴ $x < e$ 时 $f'(x) > 0$, $x > e$ 时 $f'(x) < 0$

∴ $x = e$ 时有极大值点

即函数 $f(n, p) = p^{\frac{n}{p}}$ 在 $p = e$ 时取到最大值

∴ $x \in (0, e]$ 时 $f'(x) > 0$ 即原函数呈上升趋势 (即在 $x \in (0, e]$ 时函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ 严格单调递增), $x \in [e, \infty)$ 时 $f'(x) < 0$ 即原函数呈下降趋势 (即在 $x \in [e, \infty)$ 时函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ 严格单调递减)

因此 $x = e$ 时是函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ 在定义域内的唯一极大值点, 也是全局最大值点。由此可知, 正整数域的最优解只能是距离 e 最近的两个正整数 2 和 3, 只需比较二者的函数值即可确定最优拆分项。

∴只需比较 $f(2)$ 与 $f(3)$ 大小即可

$$\text{据 } f(2) = 2^{\frac{1}{2}}, f(3) = 3^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore f(2) < f(3)$$

(五) 整数域最优拆分的结论与化简

∴当 $p \in \mathbb{Z}$ 时 $p = 3$ 有最大值:

$$\prod_{i=1}^{\frac{n}{3}} a_i = 3^{\frac{n}{3}}$$

∴ $k \in \mathbb{Z}^+$ 且 $k = \frac{n}{3}$ 及公式

$$\prod_{i=1}^k a_i = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^{k-n \bmod k} \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1 \right)^{n \bmod k}$$

∴可得出将 n 拆出的 3 的数量最大化可取到最大值

∴即 $k = \lfloor \frac{n}{3} + \frac{1}{2} \rfloor$ 时有最大值

化简得:

若 $n \bmod 3 = 0$ 且 $n \neq 1$

则最大值为: $\prod_{i=1}^k a_i = 3^{\frac{n}{3}}$

若 $n \bmod 3 = 1$

则最大值为: $\prod_{i=1}^k a_i = 3^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1} \cdot 4$

若 $n \bmod 3 = 2$

则最大值为: $\prod_{i=1}^k a_i = 3^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1} \cdot 2$

若 $n = 1$

则最大值为: $\prod_{i=1}^k a_i = 1$

证毕

其中该方法仅需要 $O(\log_3 n)$ 时间复杂度, 优于大部分其他算法.

结语:

数论相关的问题我们往往都会把自己的思路局限于题目所描述的数据范围内, 但有时如果我们能跳出题目的框架, 问题往往迎刃而解. 针对整数范围内难以直接攻克的问题, 本次探究跳出离散数域的固有限制, 将其拓展至实数域中, 通过构造函数把原问题转化为连续函数的极值求

解问题, 最终借助导数工具完成了严谨求解.

数学史上, 这样的思维方式早已被反复印证: 虚数的诞生, 打破了实数域解方程的局限; 微积分的出现, 打通了离散与连续之间的壁垒. 本次探究正是对这种数学思维的一次实践, 也让我深刻体会到, 数学学习的关键, 从来不是固守既定的框架, 而是学会转换思路、拓宽思考的边界. 把陌生的难题转化为熟悉的问题模型, 不仅能让棘手的问题涣然冰释, 更能让我们感受到数学思维的独特魅力.

参考文献:

[1] GESP 编程能力等级认证考试大纲 [EB/OL]. 中国计算机学会, 2026.

[2] 中国计算机学会. CCF 全国青少年信息学奥林匹克竞赛 (NOI) 系列活动大纲 [EB/OL]. (2024-08-15)[2026-04-07].

作者简介: 贾砚麟 (2012.02-), 男、汉族、山西省代县、初中在读、研究方向: 信息学竞赛。

通讯作者: 梁博 (1990.05-), 男、汉族、吉林省舒兰市、硕士研究生、研究方向: 信息学竞赛。